На правах рукописи

Буданов Александр Викторович

РАДИКАЛЫ КОЛЕЦ ЭНДОМОРФИЗМОВ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ АБЕЛЕВЫХ ГРУПП БЕЗ КРУЧЕНИЯ

01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Томск – 2012

Работа выполнена в на кафедре алгебры федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего профессионального образования «Национальный исследовательский Томский государственный университет»

Научный руководитель: **Мисяков Виктор Михайлович**
кандидат физико-математических наук, доцент

Официальные оппоненты: **Кожухов Сергей Федорович**
доктор физико-математических наук, профессор
ГБОУ ВПО «Сургутский государственный университет Ханты-Мансийского автономного округа – Югры», зав. кафедрой высшей математики

Фаустова Инна Леонтьевна
кандидат физико-математических наук, доцент
Северский технологический институт филиал ФГАОУ ВПО «Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», доцент кафедры высшей математики

Ведущая организация: Федеральное государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Московский педагогический государственный университет», г. Москва

Защита состоится «8» ноября 2012 г. в 14 часов 45 минут на заседании диссертационного совета Д 212.267.21 при Томском государственном университете по адресу: 634050, Томск, пр. Ленина, д. 36, корп. 2, ауд 304.
С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке Томского государственного университета.

Автореферат разослан «5» октября 2012 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Малютина Александра Николаевна

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Основной целью изучения алгебраических систем является построение соответствующей структурной теории. Иными словами — это сведение изучения рассматриваемых алгебраических структур к изучению структур, устроенных более «просто». Одной из конструкций, осуществляющих такое сведение, является радикал. Исторически, первым радикалом стал наибольший нильпотентный идеал ассоциативной конечномерной алгебры.

Первоначально целью изучения конечномерных алгебр над полем были построение и классификация алгебр над полями вещественных и комплексных чисел. В дальнейшем произошел переход от исследования конкретных структур, построенных специальным образом, к исследованию непосредственно алгебраических операций, определенных аксиоматически. Структурная теория конечномерных алгебр была построена к началу 20 века. Решающую роль при этом сыграл радикал — наибольший нильпотентный идеал.

Следующим этапом было распространение понятия радикала и соответствующих структурных теорем на кольца и алгебры, удовлетворяющие условиям максимальности и минимальности для идеалов. В то же время с ростом общности рассматриваемых структур росло число появляющихся вопросов, а набор известных методов исследования, применимых в общем случае, сокращался. В связи с этим в тридцатых-сороковых годах прошлого века был предложен ряд радикалов, с помощью которых были получены основные структурные теоремы современной теории колец.

В ходе дальнейшего развития теории колец, модулей и абелевых групп, понятие радикала было аксиоматизировано. В настоящее время большое и активно развивающееся направление теории колец и модулей — изучение различных свойств радикалов в категориях колец и модулей и взаимосвязей между ними. Однако, «классические» радикалы по-прежнему сохраняют свое значение и играют важнейшую роль в структурной теории колец.

В последних исследованиях по теории абелевых групп группы, как правило, рассматриваются вместе с их кольцами эндоморфизмов. Одной из главных задач при изучении связей между абелевой группой и ее кольцом эндоморфизмов является выявление зависимостей между свойствами группы и структурой ее кольца эндоморфизмов. Как уже было отмечено, в структурной теории колец важную роль играют радикалы, в частности, радикал Джекобсона и ниль-радикал. Поэтому представляет интерес изучение радикалов колец эндоморфизмов. Одной из первых работ, в которых систематически изучались кольца эндоморфизмов абелевых групп, является труд Р. Пирса [19]. В нем рассматривались примарные абелевы группы, их группы гомоморфизмов и кольца эндоморфизмов. Также в [19] рассматривалась проблема описания элементов из радикала Джекобсона кольца эндоморфизмов примарной абелевой группы в терминах их действия на группе: были даны характеризации радикала Джекобсона колец эндоморфизмов прямых сумм циклических

p-групп и периодически полных p-групп. В дальнейшем это направление было развито в работах М. Дугаса [14], Д. Хаузен и Д. А. Джонсона [16,17] и других алгебраистов.

Задачами изучения радикала Джекобсона и ниль-радикала колец эндоморфизмов групп без кручения начал заниматься П. А. Крылов [5]. Им были получены результаты, характеризующие радикал Джекобсона и ниль-радикал колец эндоморфизмов групп без кручения конечного ранга, алгебраически компактных и вполне разложимых групп без кручения, а также некоторых классов смешанных групп ([5,6,8]). Существенная часть наиболее интересных результатов, полученных в данном направлении, вошла в монографию П. А. Крылова, А. В. Михалева и А. А. Туганбаева [7]. В [7] также сформулированы открытые проблемы, связанные с радикалами колец эндоморфизмов абелевых групп, в частности, задача описания радикала Джекобсона кольца эндоморфизмов сепарабельной группы без кручения. Ряд проблем характеризации некоторых известных радикалов колец эндоморфизмов абелевых групп из различных классов обозначен в [9].

В настоящей работе исследование ведется по следующим направлениям. Рассматривается ниль-радикал кольца эндоморфизмов вполне разложимой абелевой группы без кручения. С помощью представления кольца эндоморфизмов такой группы кольцом матриц дана его характеризация и показано, что он совпадает с суммой всех нильпотентных идеалов кольца эндоморфизмов. Изучается радикал Джекобсона кольца эндоморфизмов однородной сепарабельной абелевой группы без кручения. Также в работе вводится понятие сильно необратимого эндоморфизма абелевой группы без кручения и с его помощью исследуются кольца эндоморфизмов вполне разложимых и сепарабельных групп без кручения.

Цель работы. Целью работы является изучение радикалов колец эндоморфизмов вполне разложимых и сепарабельных абелевых групп без кручения.

Научная новизна. Основные полученные результаты являются новыми. К основным результатам можно отнести следующие:

- Охарактеризован ниль-радикал кольца эндоморфизмов вполне разложимой абелевой группы без кручения и показано, что он совпадает с суммой всех его нильпотентных идеалов.

- Даны критерии совпадения радикала Джекобсона кольца эндоморфизмов однородной сепарабельной абелевой группы без кручения G с его идеалами $H(G)$ и $H(G) \cap F(G)$.

- Описаны сильно необратимые эндоморфизмы вполне разложимых и сепарабельных абелевых групп без кручения и исследована структура факторколец колец эндоморфизмов таких групп по идеалу всех сильно необратимых эндоморфизмов.

- Изучены связи идеалов кольца обобщенных матриц и колец, при помощи которых оно построено. Указаны способы построения идеалов кольца обобщенных матриц по идеалам составляющих его колец, описаны взаимосвязи решеток идеалов кольца обобщенных матриц и колец, с помощью которых оно построено.

Теоретическая и практическая ценность. Результаты работы имеют теоретическое значение и могут быть использованы в дальнейших исследованиях по теории абелевых групп и их колец эндоморфизмов, а также при чтении спецкурсов для студентов старших курсов и аспирантов математических факультетов.

Апробация результатов. Результаты работы докладывались и обсуждались на научном семинаре кафедры алгебры Томского государственного университета, на научном семинаре кафедры алгебры Московского государственного педагогического университета, на научной конференции, посвященной трехсотлетию со дня рождения Леонарда Эйлера (Томск, 2007 г.), на Всероссийском симпозиуме «Абелевы группы», посвященном 95-летию Л.Я. Куликова (Бийск, 2010 г.), на международном молодежном научном форуме «Ломоносов-2011» (Москва, 2011г.), на международной конференции «Мальцевские чтения», посвященной 60-летию со дня рождения С. С. Гончарова (Новосибирск, 2011г). По теме диссертации опубликовано 9 работ [20] - [28].

Объем и структура работы. Диссертационная работа состоит из введения, списка обозначений, трех глав и списка литературы. Работа изложена на 82 страницах. Библиография содержит 28 наименований.

Содержание работы

Все рассматриваемые в работе группы — абелевы, кольца – ассоциативные и имеющие единицу, модули — унитарные.

Введение содержит обоснование актуальности решаемых в работе задач, а также тезисное изложение основных полученных результатов.

В первой главе содержатся предварительные сведения об абелевых группах, кольцах эндоморфизмов, кольцах обобщенных матриц и радикалах, используемые в последующих главах, а также ряд результатов о кольцах обобщенных матриц. В первом параграфе собран ряд необходимых в дальнейшем определений и фактов из теории абелевых групп и их колец эндоморфизмов, приведено определение конечной топологии в кольце эндоморфизмов и теорема о представлении колец эндоморфизмов разложимых в прямую сумму абелевых групп кольцами обобщенных матриц.

В §2 изучаются связи идеалов кольца обобщенных матриц и колец, с помощью которых построено кольцо обобщенных матриц. Приведем определение кольца обобщенных матриц порядка 2. Пусть R, S — кольца, M — R-S-бимодуль, N — S-R-бимодуль. Пусть существуют бимодульные гомоморфизмы $\varphi : M \otimes_S N \longrightarrow R$ и $\psi : N \otimes_R M \longrightarrow S$. Для любых $n \in N$ и $m \in M$ положим $mn = \varphi(m \otimes n)$ и $nm = \psi(n \otimes m)$. Пусть гомоморфизмы φ и ψ таковы, что выполняются законы ассоциативности: $(mn)m' = m(nm')$ и $(nm)n' = n(mn')$

$(m, m' \in M, \quad n, n' \in N)$. Пусть

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} r & m \\ n & s \end{pmatrix} | r \in R, s \in S, m \in M, n \in N \right\}.$$

Можно проверить, что относительно обычного сложения и умножения матриц K образует ассоциативное кольцо, называемое кольцом обобщенных матриц порядка 2.

Пусть $I \subset R$, $J \subset S$. Введем следующие обозначения: $M(I) = \{m \in M \mid mN \subset I\}$, $M(J) = \{m \in M \mid Nm \subset J\}$, $N(I) = \{n \in N \mid Mn \subset I\}$, $N(J) = \{n \in N \mid nM \subset J\}$. Связи между идеалами кольца K и идеалами колец R и S описываются в следующей теореме.

Теорема 2.4. *Пусть I - идеал кольца R, J — идеал кольца S. Тогда следующие утверждения равносильны:*

1) существуют такие подмножества $M_{IJ} \subset M$, $N_{IJ} \subset N$, что $\begin{pmatrix} I & M_{IJ} \\ N_{IJ} & J \end{pmatrix}$ — идеал кольца K;

2) $\begin{pmatrix} I & M(I) \cap M(J) \\ N(I) \cap N(J) & J \end{pmatrix}$ — идеал кольца K;

3) $\begin{pmatrix} I & IM + MJ \\ NI + JN & J \end{pmatrix}$ — идеал кольца K;

4) $NIM \subset J$ и $MJN \subset I$;

Данный результат можно сформулировать на языке изоморфизма подходящих решеток. Хорошо известно, что множества всех левых, всех правых и всех двусторонних идеалов произвольного кольца T являются полными дедекиндовыми решетками. Обозначим их $\mathcal{L}(T)$, $\mathcal{R}(T)$ и $\mathcal{D}(T)$ соответственно. На каждой из решеток $\mathcal{L}(K)$, $\mathcal{R}(K)$ и $\mathcal{D}(K)$ определим отношение Δ следующим образом. Для идеала L (одно или двустороннего) кольца K обозначим $I(L) = \{x \in R \mid \exists A = (a_{ij}) \in L : a_{11} = x\}$ и $J(L) = \{y \in S \mid \exists A = (a_{ij}) \in L : a_{22} = y\}$. Для идеалов L_1 и L_2 (одно или двусторонних) положим $L_1 \Delta L_2$ тогда и только тогда, когда $I(L_1) = I(L_2)$ и $J(L_1) = J(L_2)$. Если $L_1 = \begin{pmatrix} I_1 & M_1 \\ N_1 & J_1 \end{pmatrix}$ и $L_2 = \begin{pmatrix} I_2 & M_2 \\ N_2 & J_2 \end{pmatrix}$, то $L_1 \Delta L_2$ равносильно тому, что $I_1 = I_2$ и $J_1 = J_2$. Можно доказать, что Δ будет конгруэнтностью на каждой из решеток $\mathcal{L}(T)$, $\mathcal{R}(T)$ и $\mathcal{D}(T)$. Декартовы произведения $\mathcal{L}(R) \times \mathcal{L}(S)$, $\mathcal{R}(R) \times \mathcal{R}(S)$ и $\mathcal{D}(R) \times \mathcal{D}(S)$ будем считать решетками с „покоординатными" операциями. В этих обозначениях справедлива следующая теорема.

Теорема 2.5.

1. *Решетка $\mathcal{L}(R) \times \mathcal{L}(S)$ (соотв. $\mathcal{R}(R) \times \mathcal{R}(S)$) изоморфна факторрешетке $\mathcal{L}(K)/\Delta$ (соотв. $\mathcal{R}(K)/\Delta$).*

2. *В решетке $\mathcal{D}(R) \times \mathcal{D}(S)$ подмножество $\mathcal{D}(R, S)$ пар идеалов, связанных соотношениями пункта 4) теоремы 2.4, является полной подрешеткой, изоморфной факторрешетке $\mathcal{D}(K)/\Delta$.*

В последнем, третьем, параграфе первой главы приведены определения и характеризации изучаемых в работе радикалов (радикал Джекобсона, верхний и нижний ниль-радикалы, радикал Левицкого), а также некоторые их свойства в применении к кольцам эндоморфизмов и обобщенных матриц. Приведем определения рассматриваемых радикалов.

Кольцо R называется первичным, если произведение его ненулевых идеалов является ненулевым идеалом. Идеал P кольца R называется первичным, если R/P — первичное кольцо.

Определение 3.3 [10]. Пересечение всех первичных идеалов кольца R называется первичным радикалом или нижним ниль-радикалом кольца R. Первичный радикал кольца R будем обозначать $P(R)$.

Идеал, состоящий из нильпотентных элементов, называется ниль-идеалом.

Определение 3.7 [10]. Наибольший ниль-идеал кольца R называется ниль-радикалом кольца R. Ниль-радикал кольца R будем обозначать $N(R)$.

Идеал I кольца R называется нильпотентным, если существует такое натуральное число n, что $I^n = 0$. Это равносильно тому, что $x_1x_2\dots x_n = 0$ при любых $x_1, x_2, \dots x_n \in I$. Идеал L кольца R называется локально нильпотентным, если каждое его конечное подмножество порождает в R нильпотентное подкольцо (под подкольцом кольца R понимается подгруппа его аддитивной группы кольца, замкнутая относительно умножения, но не обязательно содержащая единицу кольца R).

Определение 3.8 [1]. Наибольший локально нильпотентный идеал кольца R называется радикалом Левицкого или локально нильпотентным радикалом кольца R. Радикал Левицкого кольца R будем обозначать $L(R)$.

Во второй главе вводится понятие сильно необратимого эндоморфизма абелевой группы без кручения и с его помощью исследуются кольца эндоморфизмов вполне разложимых и сепарабельных групп без кручения. В §4 дано определение сильно необратимого эндоморфизма, доказаны основные свойства таких эндоморфизмов и приведен ряд примеров.

Определение 4.1. Пусть G — абелева группа без кручения. Будем говорить, что эндоморфизм $\alpha \in E(G)$ сильно необратим слева (справа), если равенство $\beta\alpha g = ng$ ($\alpha\beta g = ng$), где $g \in G$, $\beta \in E(G)$ и $n \in N$, возможно лишь в случае, когда $g = 0$.

В примере 4.4 рассматривается группа $G = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Q}$. Кольцо эндоморфизмов группы G изоморфно кольцу треугольных матриц: $\begin{pmatrix} \mathbb{Z} & 0 \\ \mathbb{Q} & \mathbb{Q} \end{pmatrix}$. Показано, что множество всех сильно необратимых эндоморфизмов группы G можно записать в виде $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \mathbb{Q} & 0 \end{pmatrix}$, откуда следует, что существуют эндоморфизмы, необратимые ни в кольце эндоморфизмов группы G, ни в кольце ее квазиэндоморфизмов, которые не являются сильно необратимыми в смысле определения 4.1.

Следующие утверждения устанавливают связи между сильно необратимыми эндоморфизмами группы без кручения G, аннулятором ее псевдоцоколя и идеалом ее поэлементно нильпотентных эндоморфизмов. Напомним, что термин «p/i-подгруппа» означает чистую вполне инвариантную подгруппу.

Определение 4.3 [7]. Псевдоцоколем группы без кручения G называется чистая подгруппа, порожденная всеми ее минимальными p/i-подгруппами. Обозначение: $\operatorname{Soc} G$.

Свойство 7. Если α — сильно необратимый эндоморфизм группы G, то $\alpha \operatorname{Soc} G = 0$.

В работе П. А. Крылова [6] определен идеал $N(G)$ кольца эндоморфизмов группы G как сумма всех идеалов, состоящих из поэлементно нильпотентных эндоморфизмов, т.е. таких эндоморфизмов ν, что для каждого $g \in G$ существует $m \in N$ со свойством $\nu^m g = 0$. Очевидно, что этот идеал содержит ниль-радикал $N(E(G))$ кольца $E(G)$.

Свойство 8. Если $\alpha \in N(G)$, то α сильно необратим.

В примере 4.6 устанавливается, что для группы $G = \bigoplus\limits_{n=1}^{\infty} A_n$, где A_n — группы ранга 1 и типа $t_n = (n, n, \dots, n, \dots)$ $(n \in \mathbb{N})$, включения из свойств 7 и 8 являются строгими.

В пятом параграфе рассматриваются сильно необратимые эндоморфизмы вполне разложимых и сепарабельных групп без кручения. Напомним, что группа называется вполне разложимой, если она является прямой суммой групп ранга 1. Группа называется сепарабельной, если каждое конечное множество ее элементов содержится в некотором ее вполне разложимом прямом слагаемом. В случае групп без кручения эти классы определяются и изучаются в [4, §85-87]. Для данных классов групп без кручения оказывалось возможным описать сильно необратимые эндоморфизмы в терминах их действия на прямых слагаемых ранга 1, а также получить ряд результатов о строении факторколец по идеалу всех сильно необратимых эндоморфизмов.

Описание сильно необратимых эндоморфизмов в терминах их действия на прямых слагаемых ранга 1 вполне разложимых и сепарабельных групп дают следующие результаты.

Теорема 5.1. *Пусть G — вполне разложимая группа без кручения, $G = \bigoplus\limits_{i \in I} A_i$ — ее разложение в прямую сумму групп ранга 1 и $\pi_i : G \to A_i$ — естественные проекции $(i \in I)$. Эндоморфизм $\alpha \in E(G)$ сильно необратим тогда и только тогда, когда для любых индексов $i, j \in I$ (не обязательно различных) неравенство $\pi_i \alpha A_j \neq 0$ влечет $t(A_i) > t(A_j)$.*

Следствие 5.2. *Эндоморфизм α сепарабельной группы G сильно необратим тогда и только тогда, когда для любых двух ее прямых слагаемых A, B ранга 1 неравенство $\pi \alpha A \neq 0$ ($\pi : G \to B$ — некоторая проекция) влечет $t(A) < t(B)$.*

Из данного описания также получается следующее следствие.

Следствие 5.3. *Множество $Q(G)$ всех сильно необратимых эндоморфизмов сепарабельной группы без кручения G является идеалом кольца $E(G)$.*

Последний факт позволяет рассматривать факторкольцо кольца эндоморфизмов сепарабельной группы без кручения G по идеалу всех ее сильно необратимых эндоморфизмов.

Пусть $\Omega(G)$ обозначает множество типов прямых слагаемых ранга 1 группы без кручения G. Пусть G — вполне разложимая группа, $G = \bigoplus\limits_{t \in \Omega(G)} G_t$ — ее каноническое разложение, то есть G_t — однородная вполне разложимая группа типа t ($t \in \Omega(G)$), называемая также однородной компонентой группы G. Напомним, что для произвольного типа t через $G(t)$ обозначается подгруппа, состоящая из всех элементов группы G, типы которых больше либо равны t, а через $G^*(t)$ — подгруппа, порожденная множеством всех элементов группы G, типы которых строго больше t. Подгруппы $G(t)$ и $G^*(t)$ будут вполне инвариантными в группе G. Для вполне разложимой группы G и типа $t \in \Omega(G)$ справедлив изоморфизм $G_t \cong G(t)/G^*(t)$ (см. [12, §86]. Исходя из этого, для сепарабельной группы G обозначим $G_t = G(t)/G^*(t)$.

Теорема 5.5. *Пусть G — вполне разложимая группа без кручения. Тогда*

$$E(G)/Q(G) \cong \prod_{t\in\Omega(G)} E(G_t)$$

и, кроме того, аддитивная группа кольца $E(G)$ является прямой суммой аддитивных групп кольца $\prod_{t\in\Omega(G)} E(G_t)$ и идеала $Q(G)$.

Доказанная теорема не обобщается на тот случай, когда G — сепарабельная группа. Однако справедлив менее сильный факт.

Следствие 5.6. Пусть G — сепарабельная группа без кручения. Тогда факторкольцо $E(G)/Q(G)$ изоморфно подкольцу прямого произведения $\prod_{t\in\Omega(G)} E(G_t)$, где $G_t = G(t)/G^*(t)$ для каждого типа t.

В §6 изучаются условия нильпотентности идеала $Q(G)$ всех сильно необратимых эндоморфизмов сепарабельной группы без кручения G. Основным результатом параграфа является следующая теорема (эквивалентности условий 1), 2), 3) и 5) следующей теоремы известны или непосредственно следуют из известных свойств рассматриваемых радикалов и результатов работы [7]).

Теорема 6.5. *Следующие условия на сепарабельную группу без кручения G равносильны:*

1) $P(E(G))^m = 0$;

2) $L(E(G))^m = 0$;

3) $N(E(G))^m = 0$;

4) $Q(G)^m = 0$;

5) $\Omega(G)$ *удовлетворяет условию m-максимальности.*

Третья глава состоит из двух параграфов. В §7 рассматривается задача описания радикала Джекобсона кольца эндоморфизмов однородной сепарабельной группы без кручения. Нам потребуются обозначения и некоторые результаты из [6]. Через $H(G)$ обозначается множество тех эндоморфизмов $\alpha \in E(G)$, для которых $\alpha x = 0$ при всех $x \in D(G)$ ($D(G)$ — делимая часть группы G) и для любого $x \in G \setminus D(G)$ из того, что $h_p(x) < \infty$ следует

$h_p(\alpha x) > h_p(x)$, где через $h_p(x)$ обозначена p-высота элемента x. Через $F(G)$ обозначается множество всех эндоморфизмов группы G, образ которых является подгруппой конечного ранга в G.

Из результатов [6] следует, что для однородной сепарабельной группы без кручения G справедливы включения $H(G) \cap F(G) \subsetneq J(E(G)) \subsetneq H(G)$. Основные результаты данного параграфа — критерии совпадения радикала $J(E(G))$ кольца эндоморфизмов однородной сепарабельной группы без кручения G с идеалами $H(G)$ и $H(G) \cap F(G)$.

Теорема 7.7. *Для однородной сепарабельной группы без кручения G следующие условия эквивалентны:*

1) $J(E(G)) = H(G)$;

2) для идеала $H(G)$ выполняется условие $(*)$;

3) радикал $J(E(G))$ замкнут в конечной топологии кольца $E(G)$.

Теорема 7.11. *Для однородной сепарабельной группы без кручения G следующие условия эквивалентны:*

1) $J(E(G)) = H(G) \cap F(G)$;

2) для любого $\alpha \in J(E(G))$ существует такое разложение группы G, $G = A \oplus B$, где A — вполне разложимая группа такая, что $\operatorname{Im} \alpha \subsetneq A$.

В восьмом параграфе рассматриваются ниль-радикал и другие наднильпотентные радикалы колец эндомофризмов вполне разложимых групп без кручения. С помощью представления кольца эндоморфизмов вполне разложимой группы кольцом матриц охарактеризован его ниль-радикал и показано, что он совпадает с суммой всех его нильпотентных идеалов.

Пусть G — вполне разложимая группа без кручения. В дальнейшем, если разложение $G = \bigoplus_{i \in I} A_i$ группы G в прямую сумму групп ранга 1 зафиксировано, мы будем отождествлять кольцо $E(G)$ с соответствующим кольцом матриц. Напомним, что элементы матрицы $[\alpha_{ij}]$, соответствующей эндоморфизму $\alpha \in E(G)$, определяются следующим образом: $\alpha_{ij} = \pi_i \alpha \pi_j$, где π_i и π_j — естественные проекции группы G на слагаемые A_i и A_j соответственно. С целью сократить и упростить дальнейшие записи примем следующее соглашение: для элементов $i, j \in I$ будем писать $i \leq j$ $(i < j)$, если $t(A_i) \leq t(A_j)$ (соотв. $t(A_i) < t(A_j)$).

Определим подмножество $\nu(E(G))$ кольца $E(G)$. Пусть $\alpha = [\alpha_{ij}] \in E(G)$. Положим $\alpha \in \nu(E(G))$, если выполняются следующие два условия:

1) из $\alpha_{ij} \neq 0$ следует $j < i$;

2) существует такое натуральное число $n = n(\alpha)$, что среди любых таких n элементов $\alpha_{i_1 j_1}, \alpha_{i_2 j_2}, \ldots, \alpha_{i_n j_n}$ матрицы α, что $i_1 \leq j_2, i_2 \leq j_3, \ldots, i_{n-1} \leq j_n$, хотя бы один равен нулю.

Заметим, что определение множества $\nu(E(G))$ может, вообще говоря, зависеть от выбора разложения группы G. Мы не будем непосредственно доказывать независимость конструкции от выбора разложения группы G, поскольку этот факт влечет основная теорема данного параграфа.

Напомним, что $N_0(K)$ обозначает сумму всех нильпотентных идеалов некоторого кольца K, $P(K)$ обозначает его первичный радикал, $L(K)$ — его радикал Левицкого и $N(K)$ — его ниль-радикал.

Теорема 8.5. *Пусть G — вполне разложимая группа без кручения, пусть выбрано ее разлоэжение $G = \bigoplus_{i \in I} A_i$ в прямую сумму групп ранга 1, с помощью которого определено множество $\nu(E(G))$. Тогда $\nu(E(G)) = N_0(E(G)) = P(E(G)) = L(E(G)) = N(E(G))$.*

Автор искренне благодарит профессора П. А. Крылова, профессора С. Я. Гриншпона и профессора А. Р. Чехлова за ценные замечания, сделанные во время его выступлений на алгебраических семинарах Томского государственного университета. Автор выражает глубокую признательность своему научному руководителю доценту В. М. Мисякову за постановку задач, внимание к работе и помощь в оформлении научных статей и диссертации.

Список литературы

[1] Андрунакиевич В. А., Рябухин Ю. М. Радикалы алгебр и структурная теория. — М. : Наука, 1979. — 496 с.

[2] Добрусин Ю. Б. О продолжениях частичных эндоморфизмов абелевых групп без кручения // Абелевы группы и модули / Томский государственный университет. — Томск, 1986. — С. 36–53.

[3] Гретцер Г. Общая теория решеток. — М. : Мир, 1982. — 452 с.

[4] Каравдина Е. Ю. Радикал Джекобсона кольца обобщенных матриц порядка 2 // Международная конференция по математике и механике: избранные доклады. — Томск: Томский государственный университет. — 2003. — С. 19–27.

[5] Крылов П. А. Радикалы колец эндоморфизмов абелевых групп без кручения // Математический сборник. — 1974. — Т. 95 (137), № 2 (10). — С. 214–228.

[6] Крылов П. А. Радикал Джекобсонона кольца эндоморфизмов абелевой группы // Алгебра и логика. — 2004. — Т. 43, № 1. — С. 60–76.

[7] Крылов П. А. Абелевы группы и их кольца эндоморфизмов / П. А. Крылов, А. В. Михалев, А. А. Туганбаев. — М. : Факториал Пресс, 2006. — 512 с.

[8] Крылов П. А. Радикалы колец эндоморфизмов абелевых групп // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. — 2007. — № 1. — С. 17–27.

[9] Мисяков В. М. Некоторые вопросы теории абелевых групп // Всероссийская конференция по математике и механике : тез. докл. 22–25 сентября 2008. – Томск: Томский государственный университет. — 2008. — С. 55.

[10] Фейс К. Алгебра: кольца, модули и категории. – М. : Мир, 1979. — Т. 2. — 464 с.

[11] Фукс Л. Бесконечные абелевы группы : в 2т. — М. : Мир, 1974. – Т. 1. — 335 с.

[12] Фукс Л. Бесконечные абелевы группы : в 2т. — М. : Мир, 1977. — Т. 2. — 416 с.

[13] Anderson F. W., Fuller K. R. Rings and Categories of Modules. — New York : Springer-Verlag, 1992. — 376 p.

[14] Dugas M. On the Jacobson Radical of Some Endomorphism Ring // Proceedings of the American Mathematical Society. — 1988. — Vol. 102, № 4. — P. 823–826.

[15] Gardner B. J. Radical theory of rings / B. J. Gardner, R. Wiegandt. – New York: Marcel Dekker, 2004. — 387 p.

[16] Hausen J. Ideals and radicals of some endomorphism ring / J. Hausen, J. A. Johnson // Pacific Journal of Mathematic. — 1978. — Vol. 74, № 2. — P. 365–372.

[17] Hausen J. Determining abelian p-groups by the Jacobson radical of their endomorphism rings / J. Hausen, J. A. Johnson // Journal of Algebra. — 1995. — Vol. 174. – P. 217–224.

[18] Kaplansky I. Infinite Abelian groups. — Michigan: Ann Arbor, Univ. Michigan Press. — 1968. – 94 p.

[19] Pierce R. Homomorphisms of primary Abelian groups // Topics in Abelian Groups. Chicago, Illinois. – 1963. — P. 215–310.

Работы автора по теме диссертации

[20] Буданов А. В. Об одной проблеме радикала Джекобсона кольца эндоморфизмов однородной сепарабельной группы // Алгебра и ее приложения. — Международная конференция : тезисы докладов. — Красноярск, 2007. – С. 20–21.

[21] Буданов А. В. Радикал Джекобсона кольца эндоморфизмов однородной сепарабельной группы // Научная конференция молодых ученых, аспирантов и студентов ММФ, посвященная трехсотлетию со дня рождения Леонарда Эйлера : сборник материалов (Томск, 16–21 апреля 2007 г.) / Томский государственный университет. – Томск, 2007. — С. 48–49.

[22] Буданов А. В. О радикале Джекобсона кольца эндоморфизмов однородной сепарабельной группы // Математические заметки. – 2010. – Т. 87, вып. 1. – С. 133–136.

[23] Буданов А. В. Квазинеобратимые эндоморфизмы абелевых групп // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. – 2010. – № 3(11). – С. 13–22.

[24] Буданов А. В. Квазинеобратимые эндоморфизмы абелевых групп // Абелевы группы: Материалы Всероссийского симпозиума, посвященного 95-летию Л.Я. Куликова (Бийск, 19–25 августа 2010). – Бийск, 2010. – С. 19–22.

[25] Буданов А. В. Об идеалах колец обобщенных матриц // Математический сборник. – 2011. – Т. 202, № 1. – С. 3–10.

[26] Буданов А. В. Ниль-радикалы колец эндоморфизмов вполне разложимых групп без кручения [Электронный ресурс] // Материалы Международного молодежного научного форума «ЛОМОНОСОВ-2011» / отв. ред. А. И. Андреев [и др.] – М. : МАКС Пресс, 2011. – 1 электрон. опт. диск (DVD-ROM).

[27] Буданов А. В. Ниль-радикалы колец эндоморфизмов вполне разложимых абелевых групп [Электронный ресурс]// Международная конференция «Мальцевские чтения», посвященная 60-летию со дня рождения С. С. Гончарова: тезисы докладов. // Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН. – Электроные даные. – Новосибирск, 2011. – URL: http://www.math.nsc.ru/conference/ malmeet/11/malmeet2011.pdf (дата обращения 01.03.2012).

[28] Буданов А. В. Ниль-радикал кольца эндоморфизмов вполне разложимой абелевой группы без кручения // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. – 2012. – № 1 (17). – С. 5–10.

Подписано в печать 4.10.2012г.
Формат А4/2. Ризография
Печ. л. 1. Тираж 100 экз. Заказ № 0110-12
Отпечатано в ООО «Позитив-НБ»
634050 г. Томск, пр. Ленина 34а